Лекция 7

КЕЗДЕЙСОҚ ШАМАЛАР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ САНДЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫ.

Кездейсоқ шамалар. Индикаторлар.

Айталық (Ω, F, P)- дискретті ықтималдық кеңістігі болсын. ($\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$- элементар оқиғалар кеңістігі, $\mathsf{F} = \{A: A \subseteq \Omega\}$- оқиғалар алгебрасы, $P: \mathsf{F} \to [0, 1]$- ықтималдық). Бұрынырақта (1-тарауды қараңыз) $A \in \mathsf{F}$ оқиғаларының ықтималдықтарын есептеген кезде бізге элементар оқиғалар кеңістігінің құрылымының (табиғатының) еш қажеті болмады. Онда бізге негізгі қажеті болған нәрселер - мәндері элементар оқиғаларға тәуелді болатын кейбір сандық сипаттамалар болды. Мәселен біз n рет тәуелсіз сынақ жЇргізілген кездегі "табыс" санын, шарларды жәшіктерге үлестірген кездегі бос қалатын жәшіктер санын т.с.с қарастырдық.

Қазір біз дискретті ықтималдық кеңістігі жағдайында енгізетін кездейсоқ шама ұғымы (кейінірек біз оны жалпы жағдай үшін анықтаймыз) кездейсоқ эксперименттер кезінде анықталған шамаларды "өлшеу" үшін қолданылады.

Дискретті кездейсоқ шамалар.

1-Анықтама. Дискретті элементар оқиғалар кеңістігінде анықталған кез келген сандық $\xi = \xi(\omega)$ функциясын *кездейсоқ шама* деп атаймыз. Егер кездейсоқ шаманың қабылдайтын мәндерінің саны ақырлы болса, онда мұндай кездейсоқ шаманы *қарапайым кездейсоқ шама* деп атаймыз. Егер кездейсоқ шаманың қабылдайтын мәндерінің жиыны ақырлы немесе саналымды жиын болса, онда мұндай кездейсоқ шаманы *дискретті кездейсоқ шама* деп атаймыз.

Сонымен, анықтама бойынша, дискретті ықтималдық кеңістігінде анықталған кез келген кездейсоқ шама дискретті кездейсоқ шама болады.

Кездейсоқ шамаларды көбінесе грек әріптерімен $(\xi, \eta, \zeta, \mu, \nu, \dots)$, кейде латын әріптерімен $(X, Y, Z, \dots)$ белгілейтін боламыз.

Мысалдар.

1) Тиынды екі рет лақтырудан тұратын тәжірибені қарастыралық. Онда $\Omega = \{ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ\}$, ал ξ кездейсоқ шамасын былай анықталық: $\xi(ГГ) = 2$, $\xi(ГЦ) = \xi(ЦГ) = 1$, $\xi(ЦЦ) = 0$. Сонымен мұнда мағынасы бойынша кездейсоқ шама $\xi(\omega)$ -гербтің түсу саны.

2) Бернуллидің n тәуелсіз сынақтар тізбегін қарастыралық. Онда $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n): \omega_i = 0 \text{ немесе } 1\}$ (еске түсірелік: егер i-ші сынақта "табыс" болса, онда $\omega_i = 1$, "сәтсіздік" болса $\omega_i = 0$). $\mu_n = \mu_n(\omega)$ кездейсоқ шамасын былай анықталық: $\mu_n(\omega) = \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n$. Яғни μ_n – Бернуллидің n тәуелсіз сынақтарындағы табыс санын білдіретін кездейсоқ шама. Егер $\xi_i(\omega) = \omega_i$ кездейсоқ шамаларын $(i = 1, 2, \ldots, n)$ енгізсек, онда $\mu_n(\omega) = \xi_1(\omega) + \xi_2(\omega) + \ldots + \xi_n(\omega)$.

3) Әрбір $A \in \mathcal{F}$ оқиғасы үшін мынандай функцияны анықталық:

$$I_A = I_A(\omega) = \begin{cases} 1, \text{ егер } \omega \in A \\ 0, \text{ егер } \omega \notin A \end{cases}$$

$I_A(\omega)$ кездейсоқ шамасы A-оқиғасының *индикаторы* деп аталады. (Жиындар теориясында $I_A(\omega)$ функциясы A-жиынының *сипаттамалық функциясы* деп аталатынын еске сала кетелік. Ықтималдықтар теориясында сипаттамалық функция деген термин басқа мақсатта қолданылатын болғандықтан біз бұдан былай қарай $I_A(\omega)$ функциясы үшін A оқиғасының индикаторы деген терминді пайдаланамыз. Кейде индикаторды $I(A)$ деп белгілейтінімізді де ескерте кетелік).

Енді индикатордың мынандай оңай тексерілетін қарапайым қасиеттерін келтіре кетелік.

$$I_\varnothing \equiv 0, \quad I_\Omega \equiv 1, \quad I_{AB} = I_A \cdot I_B, \quad I_{\overline{A}} = 1 - I_A, \quad I_{\sum\limits_{k=1}^{n} A} = \sum_{k=1}^{n} I_A \qquad (1)$$

Есеп. (1) қатынастарды дәлелдеңіз.

Кез келген оқиғалардың қосындысының индикаторын есептеу формуласын қорытып шығаралық. Қосарлылық принципі бойынша $\overline{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap\limits_{k=1}^{n} \overline{A_k}$ болғандықтан, (1) қасиеттер бойынша:

$$I_{\overline{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k}} = 1 - I_{\bigcap\limits_{k=1}^{n} \overline{A_k}} = 1 - \prod_{k=1}^{n} I_{\overline{A_k}} = 1 - \prod_{k=1}^{n} \left(1 - I_{A_k}\right)$$

Соңғы көбейтіндіні ашсақ мынандай формуланы аламыз:

$$I_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k} = \sum_{k=1}^{n} I_{A_k} - \sum_{1 \le k < l \le n} I_{A_k A_l} + \sum_{1 \le k < l < m \le n} I_{A_k A_l A_m} - \ldots + (-1)^{n-1} I_{A_1 A_2 \ldots A_n} \qquad (2)$$

Индикаторлар арқылы, жоғарыдағы 3-мысалда анықталған μ_n кездейсоқ шамасын былай жазуға болады.

$$\mu_n(\omega) = \sum_{i=1}^{n} I_{\{\omega_i = 1\}}(\omega)$$

мұндағы $I_{\{\omega_i = 1\}}(\omega) = \xi_i(\omega) = \omega_i$.

X-арқылы $\xi = \xi(\omega)$ кездейсоқ шамасының барлық қабылдайтын мәндерінің жиынын белгілейік: $\xi = \Omega \to X = \{x_1, x_2, \ldots\}, \quad x_i \ne x_j \, (i \ne j)$;

Ж-арқылы X -тің барлық ішкі жиындарының жиынын белгілелік: **Ж** $= \{A: A \subseteq X\}$.
P_ξ – арқылы $(X,$ **Ж**$)$-те мына т-мендегі формуламен анықталған жиын функциясын белгілелік:

$$P_\xi(B) = P\{\omega : \xi(\omega) \in B\}, \quad B \in \text{Ж} \tag{3}$$

Есеп. P_ξ $(X,$ **Ж**$)$-те анықталған ықтималдық болатынын көрсетіңіз.
P_ξ – ξ кездейсоқ шамасы арқылы *пайда болған (ықпалданған) ықтималдық* деп аталады.

Әрине, $P_\xi(B)$ ықтималдығы $P_\xi(x_i) = P\{\omega : \xi(\omega) = x_i\}$, $x_i \in X$ ықтималдықтары

арқылы былай өрнектелетіндігі түсінікті

$$P_\xi(B) = \sum_{i: x_i \in B} P_\xi(x_i) = \sum_{i: x_i \in B} P\{\xi = x_i\}$$

$\{P_\xi(x_1), P_\xi(x_2), \dots\}$ сандарының жиыны (тізбегі) ξ кездейсоқ шамасының *ықтималдықтарының үлестірімі (үлестірім заңы)* деп аталады.

Егер $A_i = \{\omega : \xi(\omega) = x_i\}$ оқиғаларын енгізсек, онда $A_i A_j = \varnothing \ (i \neq j)$, $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$ болғандықтан

$$\xi(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi(\omega) I_{A_i}(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i I_{A_i}(\omega)$$

$p_i = P(A_i) = P\{\xi = x_i\}$ деп белгілесек, онда ξ кездейсоқ шамасының үлестірім заңын мынандай таблица түрінде жазуға болады.

ξ	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

Бұл таблицаның бірінші жолында кездейсоқ шаманың қабылдайтын мәндері, ал екінші жолында сол мәндерді сәйкес қабылдау ықтималдықтары жазылған. Айта кететін бір нәрсе, ол p_i – ықтималдықтарының мына шарттарды қанағаттандыратындығы:

$$p_i \geq 0 \ , \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \tag{4}$$

Индикатор I_A -ның үлестірім заңын да келтіре кетелік:

I_A	0	1
P	$1 - P(A)$	$P(A)$

Ықтималдықтар теориясында әдетте (Ω, F, P) ықтималдық кеңістігін де, $\xi = \xi(\omega)$ кездейсоқ шамасын да көрсетпей-ақ $\mathrm{P}\{\xi \in B\} = \sum\limits_{i: x_i \in B} \mathrm{P}_{\xi}(x_i)$ үлестірім заңына бағынатын ξ кездейсоқ шамасы туралы айтады. Бұл жағдайда қандай да бір (Ω, F, P) ықтималдық кеңістігі және осы кеңістікте анықталған $\xi = \xi(\omega)$ кездейсоқ шамасы табылады және оның үлестірім заңы жоғарыдағы таблица арқылы анықталады деп есептеледі (шындығында да осылай болады екен де. Қараңыз: *А.Н.Ширяев. Вероятность.* М.:Наука, 1980). Әрбір жолы ықтималдық кеңістігін таңдап алу есептің елеулілігіне (маңыздылығына) және пайда болатын схеманың қарапайымдылығына т.с.с. байланысты.

Ескерту. Әрбір кездейсоқ шамаға оның үлестірім заңы сәйкес келеді. Бірақ әртүрлі кездейсоқ шамалардың үлестірім заңдары бірдей болуы мүмкін. Мысалы, егер $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B)$ болса $I_A(\omega)$ және $I_B(\omega)$ индикаторларының үлестірім заңдары бірдей.

Мысалдар.

4) Жоғарыдағы 2-мысалдағы $\xi_i(\omega)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ кездейсоқ шамаларының үлестірім заңдары былай анықталған: $\mathrm{P}(\xi_i = 0) = 1 - p,$ $\mathrm{P}(\xi_i = 1) = p$. Мұндай кездейсоқ шамалар *Бернуллилік кездейсоқ шамалар* деп аталады. Бұрын дәлелдегеніміздей $\mu_n(\omega) = \xi_1(\omega) + \xi_2(\omega) + \ldots + \xi_n(\omega)$ кездейсоқ шамасының үлестірім заңы былай анықталады.(1-тарау §3 п.4.1):

$$\mathrm{P}\{\mu_n = k\} = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

Егер ξ кездейсоқ шамасының үлестірім заңы (5) формуламен анықталса, біз ондай кездейсоқ шаманы *параметрлері* n *мен* p *- ға тең биномдық кездейсоқ шама* деп атаймыз да, оны бұдан былай қарай қысқаша $\xi \sim Bi(n, p)$ деп белгілейміз. (Мәселен, $\mu_n \sim Bi(n, p)$) ал биномдық деген атау бұл кездейсоқ шаманың үлестірім заңы биномдық коэффициенттер арқылы (5) формуламен анықталғандығынан шыққан.

5) Құтыда n_1 ақ, $n_2 = n - n_1$ қара шар бар болсын және осы құтыдан кездейсоқ түрде k шар алынған болсын. Осы алынған шарлардың ішіндегі ақ шарлардың санын ξ деп белгілелік. Онда бұл кездейсоқ шаманың үлестірімі мына формулалар арқылы анықталады (1-тарау §3, п.3.3):

$$\mathrm{P}\{\xi = k_1\} = \frac{C_{n_1}^{k_1} C_{n-n_1}^{k-k_1}}{C_n^k}, \qquad k_1 = 0, 1, 2, \ldots, \min(k, n_1) \tag{6}$$

Үлестірім заңы (5) формула арқылы анықталған кездейсоқ шама *гипергеометриялық кездейсоқ шама* деп аталады (үлестірім заңы гипергеометриялық үлестірім болғандықтан).

б) $\xi:\Omega \to \mathrm{X}=\{1,2,\ldots\}$ кездейсоқ шамасын мынандай үлестірім заңымен анықталық:

$$p_k = \mathrm{P}\{\xi = k\} = q^{k-1}p\ ;\ 0<p<1\ ,\ q=1-p\ \ ,\ k=1,2,\ldots \tag{7}$$

Мұндағы p-берілген ықтималдық. Әрине, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ болғандықтан $\{p_1, p_2, \ldots\}$ қандай да бір кездейсоқ шаманың үлестірім заңын анықтайды. Мұндай кездейсоқ шаманы параметрі p-ға тең *геометриялық кездейсоқ шама* деп атаймыз. Бұл кездейсоқ шаманы, мәселен, былай анықтауға болады. Табысының ықтималдығы p-ға тең болатын Бернуллидің тәуелсіз сынақтары қашан қажетті A оқиғасы $(\mathrm{P}(A)=p)$ пайда болғанша жүргізіле беретін болсын. ξ арқылы жүргізілген тәжірибе санын (бірінші табыс пайда болған сынақ номерін) белгілелік. Егер $A_i\left(\overline{A_i}\right)$ деп $i-$ші сынақта қажетті оқиға пайда болды (пайда болмады) дегенді білдіретін оқиғаларды белгілесек, онда сынақтар тәуелсіз болғандықтан $A_1, A_2, \ldots$ тәуелсіз оқиғалар тізбегі және де

$$\{\xi = k\} = \overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_{k-1}A_k$$

Бұдан

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\{\xi = k\} &= \mathrm{P}\left(\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_{k-1}A_k\right) = P\left(\overline{A}_1\right)P\left(\overline{A}_2\right)\ldots P\left(\overline{A}_{k-1}\right)P\left(A_k\right) = \\ &= (1-p)^{k-1}p = q^{k-1}p\end{aligned} \tag{7}$$

Ескерту. Кейде параметрі $p-$ға тең геометриялық кездейсоқ шама деп үлестірім заңы $p_k = P\{\eta = k\} = q^k p\quad q = 1-p,\quad k=0,1,\ldots$ қатынастарымен анықталған η кездейсоқ шамасын айтады. Әрине, $\eta = \xi - 1$ және мағынасы бойынша бұл қашан бірінші табыс пайда болғанға дейінгі жүргізілетін сынақтар саны.

Мысалды жеке есептермен толтыралық.

а) Егер ойын сүйегі қашан “бірлік” ұпай түскенше лақтырыла беретін болса, онда $p=\dfrac{1}{6}$ және $\mathrm{P}\{\xi = k\} = \left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-1}\cdot\dfrac{1}{6},\ k=1,2,\ldots$

ә) Егер тиын қашан “герб” түскенше лақтырыла берсе, онда $p=\dfrac{1}{2}$ және $\mathrm{P}\{\xi = k\} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2^k}$

б) Егер бір адамның қалтасында құлыпқа біреуі ғана сәйкес келетін n кілті бар болса және де ол кілттердің кез келгенін бірдей ықтималдықпен таңдап алып құлыпты ашуға пайдаланса, онда (егер әр жолы сыналған кілт кері қайтарылып отыратын болса)

$$p = \frac{1}{n}, \quad \mathrm{P}\{\xi = k\} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} \frac{1}{n}, \ k = 1,2,\ldots$$

7) $\xi : \Omega \to X = \{0,1,2,\ldots\}$ кездейсоқ шамасының үлестірім заңын былай анықталық:

$$p_k = \mathrm{P}\{\omega : \xi(\omega) = k\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \pi_k(\lambda) \qquad (\lambda > 0;\ k = 0,1,2,\ldots)$$

$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k(\lambda) = 1$ болғандықтан, $\{\pi_k(\lambda)\}$ шынында да ықтималдықтық үлестірім заңы. Мұндай кездейсоқ шаманы *параметрі* λ *-ға тең Пуассондық кездейсоқ шама* деп атаймыз да, мұны қысқаша $\xi \sim \pi(\lambda)$ деп белгілейтін боламыз. Ал $\{\pi_k(\lambda),\ k = 0,1,2,\ldots\}$ параметрі λ -ға тең ξ пуассондық кездейсоқ шамасының үлестірім заңын береді.

Ескерту. Пуассондық деген атау мынадан шыққан:

Егер $n \to \infty$, $p \to 0$, бірақ $np = \lambda_n \to \lambda > 0$ болса, онда

$$\mathrm{P}_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \xrightarrow[n \to \infty]{} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \pi_k(\lambda) \tag{8}$$

болатындығын дәлелдеуге болады.

Ал бұл тұжырым ықтималдықтар теориясының *Пуассон теоремасы* деген атпен белгілі. (4-тараудың 4-параграфын қараңыз).

Есеп. (8) қатынасты дәлелдеңіз.

Сонымен ξ кездейсоқ шамасының ықтималдықтық құрылымы $\{\mathrm{P}_\xi(x_i), i = 1,2,\ldots\}$ ықтималдық үлестірімдері арқылы толық анықталады. Қазір біз енгізгелі отырған үлестірім функциясы ұғымы кездейсоқ шаманың ықтималдықтық құрылымының эквивалентті сипаттамасын береді.